Guía Conceptual de Termodinámica
Tema: Ley de Poiseuille.
Montoya

La **ley de Poiseuille** (también conocida como **ley de Hagen-Poiseuille** después de los experimentos llevados a cabo por **Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen** (**1797-1884**) en 1839) es la ley que permite determinar el flujo laminar estacionario Φ_V de un líquido incompresible y uniformemente viscoso (también denominado fluido newtoniano) a través de un tubo cilíndrico de sección circular constante. Esta ecuación fue derivada experimentalmente en 1838, formulada y publicada en 1840 y 1846 por Jean Louis Marie Poiseuille (1797-1869). La ley queda formulada del siguiente modo:

$$\Phi_V = \frac{dV}{dt} = v_{media}\pi r^2 = \frac{\pi r^4}{8\eta}\left(-\frac{dP}{dz}\right) = \frac{\pi r^4}{8\eta}\frac{\Delta P}{L} \ ,$$

donde *V* es el volumen del líquido que circula en la unidad de tiempo *t*, v_{media} la velocidad media del fluido a lo largo del eje *z* del sistema de coordenadas cilíndrico, *R* es el radio interno del tubo, Δp es la caída de presión entre los dos extremos, η es la viscosidad dinámica y *L* la longitud característica a lo largo del eje *z*. La ley se puede derivar de la ecuación de Darcy-Weisbach, desarrollada en el campo de la hidráulica y que por lo demás es válida para todos los tipos de flujo. La ley de Hagen-Poiseuille se puede expresar también del siguiente modo:

$$\lambda = \frac{64}{Re} \ , \qquad Re = \frac{2\rho v_s R}{\eta} \ ,$$

donde *Re* es el número de Reynolds y *ρ* es la densidad del fluido. En esta forma la ley aproxima el valor del *factor de fricción*, la energía disipada por la *pérdida de carga*, el factor de pérdida por fricción o el factor de fricción de Darcy λ en flujo laminar a muy bajas velocidades en un tubo cilíndrico. La derivación teórica de la fórmula original de Poiseuille fue realizada independientemente por Wiedman en 1856 y Neumann y E. Hagenbach en 1858 (1859, 1860). Hagenbach fue el primero que la denominó como ley de Poiseuille.

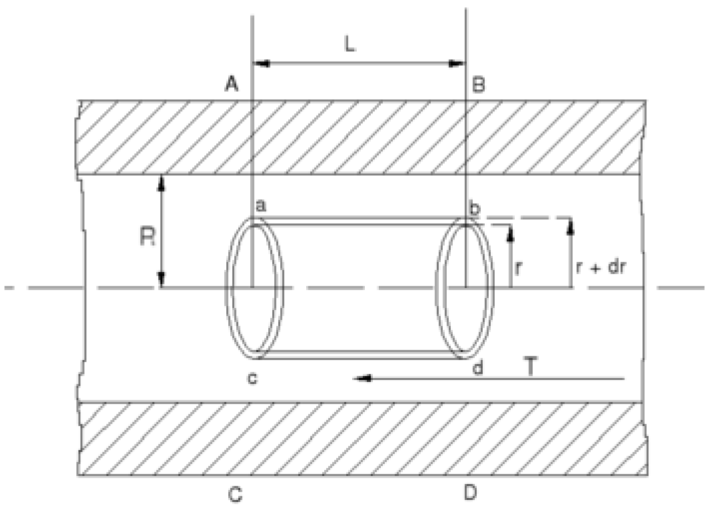
La ley es también muy importante en hemodinámica.

La ley de Poiseuille fue extendida en 1891 para flujo turbulento por L. R. Wilberforce, basándose en el trabajo de Hagenbach.

Contenidos

- 1 Cálculo de la fórmula
- 2 Curiosidad
- 3 Relación con los circuitos eléctricos
- 4 Relación con el pulmón
- 5 Referencias

Deducción de la fórmula:



Consideremos una tubería horizontal de radio R constante y dentro de ella dos secciones transversales *1* y *2* separadas una distancia L. Estas secciones delimitan un trozo de tubería que en la imagen adjunta queda delimitada por los puntos ABCD. Dentro de la tubería indicada consideramos a su vez un cilindro coaxial delimitado por los puntos abcd con área de tapas $A = \pi r^2$ y radio r. Debido a la viscosidad del fluido, sobre este cilindro actúa un esfuerzo cortante Que llamaremos T provocado por una fuerza cortante F sobre un área longitudinal $A_L = 2\pi r L$. Esta fuerza será igual a $F = p_1 A - p_2 A$ tendrá un sentido izquierda - derecha igual al desplazamiento del fluido, provocado por un gradiente de presión en la que p_1 es mayor que p_2 (no guiarse por el dibujo adjunto, aún no encontré la manera de cambiarlo). Integrando las fuerzas que actúan sobre el cilindro considerado, se obtiene la expresión de la ley de Poiseuille.

De acuerdo a la primera ley de Newton, si p_1 y p_2 son las presiones aplicadas en el centro de gravedad del área transversal del cilindro en las secciones *1* y *2* tenemos que:

$$p_1 A - p_2 A + F = 0$$

En un sólido el esfuerzo de corte es proporcional a la deformación, pero un fluido se deforma continuamente mientras se aplique el esfuerzo, por lo tanto el esfuerzo de corte será proporcional a la velocidad de corte por una constante llamada *viscosidad*, es decir: $\frac{F}{A_L} = \eta \frac{dv}{dr}$

Sustituyendo el valor de la superficie A_L por $2\ \pi\ r\ L$ y despejando F nos queda $F = 2\pi r L \eta \frac{dv}{dr}$

Reemplazamos:

$$p_1 \pi r^2 - p_2 \pi r^2 + 2\pi r L \eta \frac{dv}{dr} = 0$$

Simplificando queda:

$$\pi r^2 \Delta p = -2\pi r L \eta \frac{dv}{dr}$$
$$r \Delta p = -2L\eta \frac{dv}{dr}$$

Con lo que:

$$dv = -\frac{\Delta p}{2L\eta} r dr$$

Integrando esta ecuación:

$$v = -\frac{\Delta p}{4L\eta} r^2 + C$$

El valor de la constante C queda determinada por las condiciones en los límites. Es decir cuando r =R entonces v = 0. Por lo que:

$$C = \frac{\Delta p}{4L\eta} R^2$$

Sustituyendo el valor de C en la ecuación inicial tenemos que:

$$v = \frac{\Delta p}{4L\eta} \left(R^2 - r^2 \right)$$

Esta ecuación da la distribución de velocidades en una tubería. Como se puede observar, el término del radio elevado al cuadrado indica que se trata de un paraboloide, donde la velocidad máxima se obtiene en el eje del mismo y que coincide con el eje de la tubería. Zona en la que los efectos del rozamiento con las paredes de la tubería es mínima. La expresión de la velocidad máxima queda del siguiente modo:

$$v_{max} = \frac{\Delta p}{4L\eta} R^2$$

En la práctica es más sencillo medir la velocidad media que la velocidad máxima. La expresión de la velocidad media es la siguiente:

$$v_{media} = \frac{Q}{\pi R^2}$$

Para calcular el caudal en la tubería vamos a considerar un anillo diferencial de espesor *dr* entre dos circunferencias concéntricas con el eje de la tubería y radios *r* y *r + dr*. En este caso la expresión del caudal queda:

$$dQ = 2\pi r dr v$$

Sustituyendo la expresión de la velocidad calculada anteriormente tenemos que:

$$dQ = 2\pi r\, dr \frac{\Delta p}{4L\eta} \left(R^2 - r^2\right)$$

Integrando la ecuación anterior entre los límites *0* y *R* podremos calcular el caudal total:

$$Q = \int_0^R dQ = \int_0^R 2\pi r dr \frac{\Delta p}{4L\eta} \left(R^2 - r^2\right) \, dr =$$
$$= \frac{\pi \Delta p}{2L\eta} \int_0^R \left(R^2 - r^2\right) r \, dr = \frac{\pi \Delta p}{2L\eta} \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right)$$

y finalmente obtenemos la expresión de la ley de Poiseuille para el caudal:

$$Q = \frac{\Delta p \pi R^4}{8L\eta}$$

si seguimos trabajando sobre esta fórmula y sustituimos esta expresión del caudal en la fórmula anterior de la velocida media obtenemos lo siguiente:

$$v_{media} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{\Delta p R^2}{8L\eta} = \frac{\Delta p D^2}{32L\eta}$$

de donde se deduce que:

$$v_{media} = \frac{v_{max}}{2}$$

despejando la pérdida de presión en las anteriores ecuaciones obtenemos:

$$\Delta p = \frac{32\eta L v_{media}}{D^2}$$

que no deja de ser otra expresión de la ley de Poiseuille para la pérdida de presión en una tubería de sección constante con flujo laminar.

Si dividimos y multiplicamos el segundo miembro de la ecuación anterior por la expresión $2\rho v_{media} g$ tenemos que:

$$\Delta p = \frac{32\eta L v_{media}}{D^2} \frac{2\rho v_{media} g}{2\rho v_{media} g} = \frac{64\eta}{v_{media} D\rho} \frac{L}{D} \frac{v_{media}^2}{2g} \rho g =$$

donde $\frac{\Delta p}{\rho g} = h_f$ es la pérdida de carga y $Re = \frac{v_{media} D\rho}{\eta}$ es la expresión del número de Reynolds, con lo que la pérdida de carga queda expresada del siguiente modo:

$$h_f = \frac{64}{Re} \frac{L}{D} \frac{v_{media}^2}{2g}$$

comparando esta última expresión con la ecuación de Darcy-Weisbach se deduce el valor de λ:

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

siendo esta otra expresión de la ecuación de Hagen-Poiseuille.

Curiosidad:

La ley en sí misma muestra cómo de interesante es este campo, dado que la ecuación de Darcy-Weisbach debería ser denominada completa y propiamente como ecuación de Chézy - Weisbach - Darcy - Poiseuille - Hagen - Reynolds - Fanning - Prandtl

- Blasius - von Kármán - Nikuradse - Colebrook - White - Rouse - Moody o abreviadamente como CWDPHRFPBKNCWRM.

Nótese también como en la fórmula el flujo depende fuertemente del radio. Si el resto de factores permanece constante, el doblar el radio del canal da como resultado un incremento en 16 veces del flujo.

Relación con los circuitos eléctricos

La electricidad fue originalmente entendida como una clase de fluido. Esta analogía hidráulica es todavía útil en el ámbito académico con fines didácticos.

La ley de Poiseuille se corresponde con la ley de Ohm para los circuitos eléctricos, donde la caída de presión Δp^* es reemplazada por el voltaje V y el caudal Φ_V por la corriente eléctrica I. De acuerdo con esto el término $8\eta\ l/\pi r^4$ es un sustituto adecuado para la resistencia eléctrica R.

Relación con el pulmón

La ley de Poiseuille tiene aplicación en la ventilación pulmonar al describir el efecto que tiene el radio de las vías respiratorias sobre la resistencia del flujo de aire en dirección a los alveolos. De ese modo, si el radio de los bronquiolos se redujera por la mitad, la ley de Poiseuille predice que el caudal de aire que pasa por ese bronquiolo reducido tendría que oponerse a una resistencia 16 veces mayor, siendo que la resistencia al flujo es inversamente proporcional al radio elevado a la cuarta potencia.[1]

Este principio cobra importancia en el asma y otras enfermedades obstructivas del pulmón. Al reducirse el radio de las vías aéreas respiratorias, el esfuerzo de la persona se eleva a la cuarta potencia.

Referencias

1. ↑ Enfermería en Cuidados Críticos Pediátricos y Neonatales. [1]